A 40. ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI
2009

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2009-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 40-ik, ezúttal már tizenkettedszer nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2009. október 22 – november 2.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2009. október 22-én, csütörtökön, közép-európai idő szerint 12 órától (10:00 GMT)** magyar és angol nyelven, pdf formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.106 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldása maximálisan 100 pontot ér.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható*. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TEX, LATEX, PDF vagy Postscript formátumban) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LATEX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.106 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy4242@gmail.com

Beadási határidő: 2009. november 2. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 2-től 3-ig lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó 1., 2. és 3. díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 10-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat az eredményhirdetésen nyújtjuk át, illetve külföldre postán küldjük el.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Cserti József
A feladatok fordítói: Varga Dezső és Takács Gábor

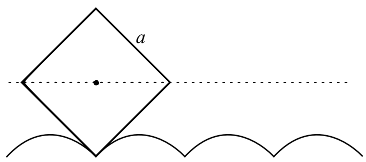
1. A középkorban azt hirdették, hogy a Föld lapos. Azonban a görögök már sokkal korábban tudták, hogy gömbölyű!

   Meg is mérték a sugarát. Mint ismeretes, „amikor a gátőrök jelentették Eratoszthenésznek, hogy (a majdnem pontosan a Ráktérítőn fekvő) Szüéné (ma: Asszuán) városában a nyári napforduló idején délben a Nap nem vet árnyékot – a Nílus legmélyebb vízállásmutató kútjának fenekét is eléri a sugara –, elvileg helyes módszert talált a Föld kerületének számítására. Ugyanebben az időben Alexandriában egy pózna árnyékát megmérve a napsugarak beesési szögét 7,2 foknak találta. A Földet gömb alakúnak tételezve aránypárt állított fel a távolságok és a szögek alapján..." (forrás: wikipedia.hu).

   Azonban, ha a Föld lapos, és a Nap véges magasságból süt függőlegesen az egyik városra, a másik városra akkor is ferdén érkeznek a sugarai. Hogyan dönthették volna el a görögök, hogy melyik magyarázat a helyes, a lapos vagy a gömbölyű Föld modellje? Próbálkozzunk a napsugarak szögeinek mérésével az adott földrajzi területen belül! Milyen pontosan kell szöget mérni, hogy a kérdés eldönthető legyen?

   (Kaufmann Zoltán)

2. Egy homogén tömegeloszlású, a oldalélű kockának olyan pályát készítünk, amelyen csúszásmentesen végiggördítve a kocka középpontja egy vízszintes egyenes mentén mozog („négyszögletes kerék”).
   a) Milyen alakú a pálya?
   b) Ha a pályát a vízszinteshez képest α szögben megdöntjük, a kocka csúszás nélkül legördül rajta (a súrlódás elegendően nagy). Érdemes-e lecserélni a hagyományos, henger alakú kereket, ha az a célunk, hogy minél hamarabb leérjünk a lejtő aljára?

   (Vigh Máté)

3. Spagettit (tömör henger alakú, hosszú tésztát) szippantunk be. A spagetti nyilván attól megy be a szánkba, mert szívjuk a szájüreg felől. A tésztára a szájunk által ható erők közül egyik csak nyomóerő (ettől nem megy be mellette levegő), a másik csak súrlódás, ami kifelé hat. Akkor mi „nyomja be” a szánkba? A spagetti mindenhol hengeres, azaz a külső légnyomás nem „befelé” nyomja, hanem merőlegesen. Mondhatnánk, hogy a végén: de ki gondolja, hogy a tányéron tekergő méteres tészta végét megnyomva bármi is történik? A szánk belsejében levő, hosszú, tekergő tészta végét szintén nem érezzük, hogy húzná bármi is. Adjuk meg a tésztára ható erőket, és mutassuk meg, hogy a befelé nyomó erő csak a légnyomástól és a tészta keresztmetszetétől függ.

   (Varga Dezső)

4. Vízszintes, sima talajon nyugvó, D direkciós erejű, m tömegű, l hosszúságú rugó egyik vége rögzített, másik végének pedig v sebességű, M tömegű test ütközik. E test mozgása a rugó tengelye mentén történik, az ütközés rugalmas.

   a) Mennyi idő múlva és mekkora sebességgel lökődik vissza a M tömeg, ha a rugó m tömege lényegesen kisebb nála, de nem elhanyagolható?
   b) Mi a helyzet, ha a tömegarány fordított?

   (Woynarovich Ferenc)

5. Egy pontszerű testet függőlegesen hajítunk felfelé. A test tömege kezdetben m_0, és a mozgás során az alábbi módon függ a hajítás kezdete óta eltelt t időtől:

   $$m(t) = m_0\, e^{\frac{t}{\tau}},$$

   ahol τ egy idődimenziójú állandó. A test végig pontszerűnek tekinthető. A tömeg „növekménye” mindig együtt mozog a testtel. A testet a Föld felszínéről $v_0 = g\tau$ kezdősebességgel indítjuk.
   a) Mennyi idő múlva jut pályájának tetőpontjára a test?
   b) Ekkor mennyi a tömege?
   Hanyagoljuk el a Föld forgását!

   (Varga Bonbien)

6. Egydimenziós harmonikus potenciálhoz köbös és magasabb rendű tagokat tartalmazó hatványsort adunk. Milyen nemzérus Taylor együtthatók esetén lesz az egzakt periódusidő amplitúdófüggetlen? Próbáljuk megsejteni a teljes függvényalakot, akár az alacsonyrendű tagokból, akár más egyszerű fizikai meggondolás alapján, azután igazoljuk, hogy a periódusidő állandó!

(Györgyi Géza)

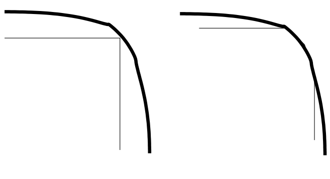
7. Tegyük fel, hogy létezik egy extra dimenzió, d kiterjedéssel és periodikus határfeltételekkel, azaz a tér topológiája $\mathbb{R}^3 \times S_1$, metrikája pedig a szokásos sima euklideszi metrika! Határozzuk meg ebben a térben egy tömegpont gravitációs potenciálját! (Útmutatás: az egzakt eredmény megadható egy egyszerű képlettel; segítséget jelenthet például a Basel-probléma Euler-féle megoldásának tanulmányozása) Mutassuk meg, hogy nagyon nagy, ill. nagyon kicsi távolságokra visszakapjuk a szokásos három- ill. négydimenziós Newton-potenciált! Hogyan lehetne megoldani ugyanezt a problémát $\mathbb{R}^5 \times S_1$ esetében, vagy általában $\mathbb{R}^{2n+1} \times S_1$-en?

(Pozsgay Balázs)

8. Egy L hosszúságú, elhanyagolható tömegű nyújthatatlan kötél egyik végét rögzítsük a plafonhoz úgy, hogy a lelógó része szabadon mozoghasson (a gravitációs tér homogén)! Rögzítsünk a kötélre n darab m tömegű golyót úgy, hogy azok egyenlő $l = L/n$ távolságra helyezkedjenek el egymástól. Az első golyót a kötél rögzítési pontjától l távolságra kössük, az utolsó, n-edik golyót pedig a kötél másik végére. Tegyük fel, hogy mindegyik golyó ugyanabban a síkban mozog! Rendszerünk a matematikai inga egy általánosítása, ezért nevezzük el n-es ingának.
a) Adjuk meg az n-es inga egyensúlyi helyzet körüli kis rezgéseinek sajátfrekvenciáit, és az ezekhez tartozó normálmódusait! Rajzoljuk fel ez első néhány módust különböző n-ek esetén!
b) Számoljuk ki a sajátfrekvenciák reciprokainak négyzetösszegét! Milyen érdekes eredményt kapunk?
c) Vizsgáljuk meg az $n \to \infty$ határátmenetet! Számoljuk ki a sajátfrekvenciákat ebben a határesetben is! Ellenőrizzük eredményünket közvetlen számolással is, azaz határozzuk meg egy folytonos, egyenletes tömegeloszlású, felső végén rögzített L hosszúságú húr kis lengéseinek sajátfrekvenciáit! Ugyanazt az eredményt kapjuk-e? Ha nem, akkor miért nem?
Extra kérdés: Milyen meglepő matematikai összefüggést nyerhetünk, ha a b) rész eredményét összevetjük a c) rész eredményével?

(Varga Bonbien)

9. A bal oldali ábra szerint egy kötelet vetünk át egy peremen, amely azon súrlódás nélkül elcsúszhat. A kötél nagyon hosszú, súlytalan, nagyon vékony, de merev, azaz a „hajlításnak” ellenáll: tegyük fel, hogy a görbületi sugár fordítottan arányos a kötélen megjelenő forgatónyomatékkal. A kötelet balra vízszintesen, illetve függőlegesen lefelé húzzuk adott erővel.
a) Adjuk meg a kötél alakját meghatározó differenciálegyenletet (pl. a kötél ívhossza szerinti paraméterezésben, vagy más kényelmes alakban)! Adjuk meg a kötél alakját leíró függvényt!
b) A kötelet sokszor föl-le húzogatjuk adott erővel a nagyon kemény peremen, ami emiatt elkezd kopni (jóllehet a fent említetteknek megfelelően a kötélre ható súrlódási erő elhanyagolható). Egy idő után az éles perem a jobb oldali ábrához hasonló alakot kezdi felvenni. Tegyük fel, hogy a kopás sebessége arányos azzal az erővel, amivel a kötél nyomja a peremet. Milyen alakot vesz fel a kopott perem? Tekinthetünk két határesetet: mi a helyzet, ha a kötél végtelen „lágy”, illetve végtelen „merev”? Az általános esetben az alakot numerikusan is megprópálhatjuk meghatározni.



(Varga Dezső)

10. Egy légkör nélküli, gömb alakú kisbolygóba nagy sebességű meteor csapódik be. A becsapódás pontjából kőzetanyag dobódik ki az űrbe, ennek egy része később visszahull a felszínre. Tételezzük fel, hogy az összes szétrepülő kőzetdarab egyforma méretű, valamint hogy kirepülésük szögeloszlása egyenletes a felső féltérben. Tekintsünk el a visszahulló kődarabok által kiváltott másodlagos robbanásoktól, valamint a visszapattanástól: a lehulló kőzetdarabok a becsapódás pontján maradnak.
a) Tegyük fel még azt is, hogy az összes kirepülő kőzetdarab egyforma kezdősebességgel indul! Határozzuk meg a lezuhanó kőzetdarabok által alkotott törmelékréteg eloszlását a kisbolygó felszínén, és diszkutáljuk az eredményt a kezdősebesség függvényében! A teljes kidobott kőzetanyag hányadrésze hull vissza a felszínre?
b) Most ne tételezzük fel a közös kezdősebességet (a szögeloszlás viszont legyen továbbra is egyenletes)! Lehetséges-e a kezdősebességek olyan eloszlása, amely az egész kisbolygó felszínén egyenletes vastagságú törmelékréteg kialakulását eredményezi?

(Dávid Gyula)

11. Egy edényből kiöntjük a vizet. A víz kifolyik, majd egyre lassabban csöpögni kezd: ebben a szakaszban a víz a falra feltapadt vékony vízréteg véges viszkozitása miatt csak lassan folyik ki. Tekintsük azt az egyszerűbb esetet, mikor egy enyhén döntött síkfelületről „leöntjük" a vizet. Tegyük fel, hogy a felületi feszültség és a párolgás elhanyagolhatóan kicsi. Milyen (csökkenő) ütemben fog a víz lefolyni? Próbáljunk kísérleteket is végezni, hogy a jósolt időfüggés nagyjából megvalósul-e (a csöpögés üteméből következtetni lehet a vízáramlás ütemére). Bónuszkérdések: ha edényből öntenénk, mennyire függne a kvalitatív eredmény az edény alakjától? Próbáljuk megválaszolni a frusztráló kérdést: mennyi tea marad a kannában (illetve sör az üvegben, kit mi frusztrál jobban), ha már csak alig csöpög?

(Varga Dezső)

12. Merre mozog az ábrán látható füstkarika középpontja? Miért?

(Vigh Máté)

13. Két 20 fokos pohárban egyenként 3–3 dl víz van. Az egyikbe 0,05 kg sót teszünk, szintén 20 fokosat, és megvárjuk, míg feloldódik. Ezután mindkét pohárba teszünk egy 0,1 kg-os, -10 fokos jégkockát. Melyik pohárban lévő jég olvad meg hamarabb, körülbelül mennyivel hamarabb, és miért? Válaszodat számolással támaszd alá!

(Csanád Máté)

14. Einstein (és Smoluchowski) óta tudjuk, és tanuljuk is, hogy ha egy Brown-részecske γ közegellenállási együtthatóját ismerjük (megmérjük, vagy kiszámoljuk), akkor a Brown-mozgás okozta diffúzió D együtthatóját megmérve az egyszerű $k_{\mathrm{B}}T = \gamma D$ képlet megadja a közeg hőmérsékletét. Mozogjon most egy gömb alakú Brown-részecske olyan ritka gázban, ahol egyszerre általában csak egy gázmolekulával ütközik! Az ütközések rugalmasak, és két ütközés között a Brown-részecske V sebessége állandó. Tegyük fel, hogy képesek vagyunk a Brown-részecske minden egyes ütközését észlelni, így ismerjük az egyes ütközések után felvett sebességek $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sorozatát. Határozzuk meg pusztán ennek a sorozatnak az ismeretében (ha a Brown-részecske R sugara, M tömege, és a méréssorozat T ideje is adott) a közeg (a ritka gáz) p nyomását!

(Diósi Lajos)

15. Tekintsük a következő lineáris, sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszert:

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{v}}(t) + \hat{\mathbf{q}}(t),$$

ahol $\mathbf{M}$ tetszőleges valós négyzetes mátrix, aminek λ_k sajátértékei, valamint $\mathbf{l}^{(k)^*}$ bal- és $\mathbf{r}^{(k)}$ jobboldali sajátvektorai ismertek. Emellett $\hat{\mathbf{q}}$ fehérzaj, vagyis a komponensei közötti korreláció:

$$\langle \hat{q}_i\,(t')\,\hat{q}_j\,(t'')\rangle = D_{ij}\,\delta\,(t'-t'')\,.$$

Tanulmányozzuk a $\hat{\mathbf{v}}$ komponensei közötti korreláció időfüggését: $\langle \hat{v}_i\,(0)\,\hat{v}_j\,(0)\rangle$ ismeretében határozzuk meg $\langle \hat{v}_k\,(t)\,\hat{v}_l\,(t)\rangle$ -t!

(Kónya Gábor)

16. A *http://www.pokerstars.hu/poker/room/features/security/* webcímen összefoglaló jelleggel olvashatunk az igazságos keverési algoritmusokkal kapcsolatosan felmerülő problémákról. Találhatunk itt egy megbízhatónak mondott keverési algoritmust is, mely mentes a „keverések rossz eloszlásától". Legyen adott egy N lapos kártyapakli, melyet a fenti weblapon található algoritmus szerint keverünk! Keverés után megvizsgálhatjuk, hogy hány lap maradt az eredeti helyén. Kérdés, hogy mi a valószínűsége (jelöljük ezt $P_{N,k}$-val) annak, hogy pontosan $0 \leq k \leq N$ lap maradt a helyén? Mi lesz k várható értéke és szórása adott N értéknél? Határozzuk meg az $S_{(N)} = -\sum_{k=0}^{N} P_{N,k} log_2 P_{N,k}$ keverési entrópiát! Adjuk meg $P_{N,0}$-t abban az esetben mikor $N \to \infty$, majd becsüljük meg, hogy $P_{N,0}$ adott N-re mennyire tér el ettől a határértéktől!

(Homa Gábor és Kis-Szabó Krisztián)

17. 1873-ban a 25 éves Eötvös Loránd mutatta be az Akadémián a 20 éves Fröhlich Izidor dolgozatát, az alábbi szavak kíséretében: „Fröhlich Izidor harmadéves hallgató kimutatta, hogy a légköri sugártörés elméletének alapján a gömbalakú égitestek (Nap, Hold) látszólagos alakjának kerüléknek kell lennie, ha az illető égitest emelkedése a horizont felett 5 foknál nem kisebb." Ellenőrizzük, hogy igaz-e, és ha igen, milyen közelítésben igaz a fenti állítás! (A „kerülék" az ellipszis nyelvújítás-korabeli neve.)

(Radnai Gyula)

18. Egy d vastagságú planparalel lemez törésmutatója egy adott $n(z)$ függvény szerint változik, ahol z a lemezre merőleges koordináta. A lemez egyik oldalán merőlegesen beeső fény intenzitásának hányadrésze jut át a lemezen? Tegyük fel, hogy a törésmutató z-nek lassan változó függvénye, azaz $|dn/dz| \ll 1/\lambda$, ahol λ a beeső fény hullámhossza. Vizsgáljunk érdekes speciális eseteket!

(Cserti József)

19. A szupravezető anyag lebegni tud egy permanens mágnes felett, köszönhetően annak, hogy mágneses momentuma szerencsés módon függ a mágneses tértől (adott esetben úgy, hogy a mágneses tér zérus a szupravezetőben). Tekintsük ezzel szemben azt a határesetet, amikor permanens mágnes(rendszert) akarunk lebegtetni szintén permanens mágnesek felett. A permanens mágnesnek az a tulajdonsága, hogy mágneses momentuma független a külső mágneses tértől, jóllehet ez a mágneses momentumsűrűség tetszőlegesen változhat a mágnes belsejében a hely függvényében. Lehetséges-e, hogy permanens mágnesekből alkotott tetszőleges rendszer (pl. merev rudakkal összekötve) alkalmasan elhelyezett permanens mágnesek felett lebegjen?

(Varga Dezső)

20. Dr. Einundzwanzigstein Albert már sok-sok éve oktatgatta a (természetesen csak 1+1 dimenziós) speciális relativitáselméletet a messewani egyetem hallgatóinak – az utóbbi időben egyre kisebb sikerrel. Először csak a képleteit nem értették, aztán már az elméleti kijelentéseket is egyre nagyobb berzenkedés fogadta. A bili akkor borult ki, amikor az egyidejűség relativitásáról esett szó. Mint tudjuk, a nemrég bevezetett ZYXSc-képzés Harmadik Irányelve szerint a hallgatók szájának mérete fordítva arányos a tudásukkal, ezért aztán Albert tulajdonképpen nem is csodálkozott, amikor egyik kedves tanítványa, Bunkó Rómeó az óra után odaállt eléje, és imígyen szóla: „Figyejj, öreg! Ha én meg a Júlia egyszerre jutunk a csúcsra, akkor az egyszerre van! Semmi duma a viszonylagosságról, és ha (jól értettem?) valami megfigyelőt akarsz küldeni, annak letöröm a derekát! Értve vagyok?" (Bunkó Rómeó eredetileg azt is hozzá akarta tenni: „Húsz centi pedig húsz centi, érted?" Júlia és barátnői azonban viszonylag gyorsan meggyőzték ennek ellenkezőjéről.) Albert felnézett a nála két fejjel nagyobb Bunkóra, és szomorúan bólintott. Amikor Albert a történetet elmesélte a (messewani) dékánnak, az egyetértett a diákokkal: „Most mit vársz? Õk fizetnek, ők a megrendelők, mi csak szolgáltatók vagyunk. Minek ragaszkodsz az elavult dogmáidhoz? Ja igen, a múltkor a srácok panaszkodtak, hogy valami furcsa szögletes és hegyes jelekkel írtad tele a táblát, semmit sem lehetett érteni belőle..." Albert utánanézett a dolognak, és rájött, hogy a messewani középiskolák matematikai tananyagából két éve törölték a gyökvonást („csak semmi root-ságot az iskolákba!"), így nem csoda, hogy hallgatói nem értették meg a szokásos transzformációs képleteket. Barátja, Lőrinc tanácsára Albert nekifogott tehát az anyag megreformálásának. Tudjuk, a kecske és a káposzta komplementaritása ... Maga is meglepődött, hogy erőfeszítéseit milyen hamar siker koronázta. A felállított új elmélet, a (ZYXSc-képzés számára) re(dukált)lativitáselmélet alapfeltevései a következők voltak: 1) Abszolút idő, abszolút egyidejűség: $t' = t$ (hiába, két fej különbség...). 2) A fénysebesség állandósága: ha a K rendszerben $dx = c\,dt$, akkor ebből következik, hogy a K' rendszerben fennáll: $dx' = c\,dt'$ (ahol c egy sebességdimenziójú pozitív konstans). 3) Matematikai egyszerűség: a képletekben nem szerepelhet négyzetgyökvonás, hiperbolikus függvények, stb., kizárólag a négy alapművelet. A számítás eredményét végül Lőrinc barát öntötte végső alakba, ezért is nevezik a kapott formulákat Lőrinc-transzformációnak. Lőrinc később előállt egy fizikai képpel is: a képletek úgy jegyezhetők meg a legegyszerűbben, ha feltételezzük, hogy az x irányban V sebességgel mozgó testek x irányú kiterjedése egy V/c-tól függő faktorral szorzódik (ez az ún. Lőrinc-kontrakció). A történet folytatása szomorú. Néhány évig vidáman oktatták a re(dukált)lativitáselméletet, aztán a következő középiskolai reform eltörölte a törtek oktatását is („nem kellenek megtört gerincű diákok!"). Ekkor áttértek a $c = 1$ egységrendszerre, így V/c helyett egyszerűen V-t lehetett írni. Amikor azonban újabb néhány év múlva az aktuális reformnak a kivonás („ne mutassunk negatív példát a diákoknak") és a zárójelek („elég volt az iskolai oktatás zártságából!") is áldozatul estek, dr Einundzwanzigstein Albert végleg feladta. Jelenleg popcornt árul a messewani pornómoziban, Lőrinc pedig ízesített dinnyék forgalmazásával kísérletezik. Amikor a re(dukált)lativitáselméletről kérdezzük őket, mindketten mély hallgatásba burkolóznak. Oknyomozásunk során természetesen elkértük Bunkó Rómeó füzetét, de amit az órai jegyzet helyén találtunk, attól még a nyomdafesték/tintasugár/elektronsugár/folyadékkristály is elpirulna. Így hát a Lőrinc-transzformáció nevezetes formuláinak mindörökre nyoma veszett.

Vagy mégsem? Talán a Negyvenedik Ortvay-verseny résztvevői a fenti töredékek alapján rekonstruálhatják a tudománytörténet eme elfeledett gyöngyszemét? Mindenesetre meg kellene próbálni...

a) Írjuk fel a fenti 1-2-3 kritériumoknak megfelelő (1+1 dimenziós) Lőrinc-transzformáció képleteit $x' = f(x, t, V)$ alakban! (A K rendszerből nézve a K' rendszer V sebességgel mozog balra.)
b) Vizsgáljuk meg a transzformáció inverzét! Mekkora V' sebességűnek látszik a K rendszer a K'-ből nézve?

c) Van-e maximális sebesség, és ha van, mekkora?
d) Írjuk fel a Lőrinc-kontrakció képletében szereplő függvényt!
e) Vezessük le az Einundzwanzigstein-féle sebességösszeadási formulát!
f) Mutassuk meg, hogy a Lőrinc-transzformációk csoportot alkotnak (Albert ezt már meg sem merte említeni tanítványainak...). Keressük meg e csoport kanonikus paraméterét, majd fejezzük ki az oda-, illetve vissza-Lőrinc-transzformációban szereplő sebességet a kanonikus sebességparaméterrel!
g) Mutassuk meg, hogy (c-hez képest) kis sebességek esetén a re(dukált)lativitáselmélet formulái átmennek a klasszikus, Galilei-Newton-féle mechanika megfelelő képleteibe!
h) Mutassuk meg, hogy (a látszat ellenére) az elméletben nincs kitüntetett, „abszolút nyugvó" koordinátarendszer, minden, egymáshoz képest állandó sebességgel mozgó inerciarendszer egyenrangú!
i) Láttuk, hogy Einunzwanzigstein elmélete sokkal egyszerűbb és szemléletesebb Einsteinénél. Mi lehet az oka annak, hogy Einstein mégsem ezt az elméletet fedezte fel? Mi a fő különbség e két elmélet között?
j) Mynden Lee ben Canal, a közismert tudománykritikus azt állítja, hogy Einundzwanzigstein elmélete – minden látszólagos extravaganciája ellenére – egyáltalán nem új. Lee ben Canal hallott egy bizonyításról, mely szerint bizonyos ésszerű matematikai feltételek megkövetelésével csak kétféle transzformáció fér össze: nevezetesen a Galilei- és a Lorentz-transzformáció. Az új elméletben szereplő Lőrinc-traszformáció tehát ezek valamelyikével izomorf. Igaz ez az állítás? Ha nem, miért nem? Ha igen, akkor melyik elmélettel ekvivalens a re(dukált)lativitás elmélete? Írjuk fel azokat a képleteket, amelyek a két elméletet egymásba alakíthatják!

(Dávid Gyula)

21. (Az előző feladat folytatása). Dolgozzuk ki az Einundzwanzigstein-féle re(dukált)lativitáselmélet kinematikáját és pontmechanikáját!

a) Vezessük be a felső és alsó indexes vektorokat és tenzorokat, definiáljuk a skaláris szorzatot, metrikus tenzort stb!
b) (Az a) résztől független feladat) Írjuk fel a szabadon mozgó pontrészecske hatásintegrálját! Ügyeljünk a korrespondencia-elv fennállására: kis sebességeknél képleteinknek át kell menniük a klasszikus mechanika megfelelő formuláiba!
c) A hatásfüggvény alapján definiáljuk a szabad pontrészecske impulzusát és energiáját! Hogyan transzformálódnak ezek a mennyiségek a Lőrinc-transzformáció során?
d) Vizsgáljuk meg az impulzus- és energiamegmaradás tételének fennállását!
e) Írjuk fel a homogén külső gravitációs térben mozgó re(dukált)lativisztikus részecske mozgásegyenletét, és oldjuk is meg!
f) Írjuk fel az (1+1 dimenzióban értelmezett) elekromágneses mezőben mozgó részecske mozgásegyenletét!

(Dávid Gyula)

22. Oldjuk meg a relativisztikus elektrodinamikában szereplő elektromágneses térerősségtenzor sajátérték-problémáját! Válasszuk külön az esetleges szinguláris speciális esete(ke)t! Mi a sajátértékek és a sajátvektorok fizikai jelentése? Hogy viszonyulnak a sajátértékek az elektromágneses mező ismert invariáns mennyiségeihez? Ismételjük meg a vizsgálatokat a vákuumbeli elektromágneses mező energiaimpulzus-tenzorával, ehhez használjuk fel a korábbi eredményeket! (Ajánlott irodalom: L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti fizika II., Klasszikus erőterek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 25. §)

(Dávid Gyula)

23. Milyen távolra juthat el egy űrutazó élete során? Tegyük fel, hogy létezik olyan rakétatechnika, amellyel konstans gyorsulással lehet folyamatosan gyorsulni tetszőleges ideig! (A hajtóanyag problémájától, a meghajtás részleteitől és egyéb zavaró tényezőktől tekintsünk el!) Válasszunk reális paramétereket, pl. 30 év utazás; olyan gyorsulás, amely az űrhajóban az állandó földi súly érzetét kelti; valamint a jelenleg legelfogadottabb gyorsulva táguló Univerzum (Lambda-CDM) modell a jelenleg ismert paraméterekkel!

(Csabai István)

24. Tekintsünk egy R sugarú kör alakú p(n)-típusú félvezető szeletet, amelynek felső t vastagságú rétegét egy megfelelő típusú atom ionjainak adalékolásával n(p)-típusúvá tesszük. A létrejövő p-n átmenet egy fontos jellemzője a felső réteg ellenállása, $R_s = \rho/t$, ahol ρ a felső réteg fajlagos ellenállása. További két paraméter határozza meg a töltéshordozók terjedését a felső rétegben: C_d és R_d az átmenet egységnyi felületének kapacitása és ellenállása.

Világítsuk meg a p-n átmenetet egy megfelelő hullámhosszú (a foton energiája legyen nagyobb a tilos sáv energiájánál), és f frekvenciával szaggatott négyszögjel alakú fénnyel! A fényfolt sugara legyen r_L. A fény által generált elektron-lyuk párok diffúzióval eljutnak a p-n átmenetig, ahol szétválasztódnak: az elektronok az n-típusú rétegben a lyukak a p-típusú rétegbe. A felső réteg általában vékony, így a töltéshordozók terjedése nagyon jó közelítéssel a réteg síkjában történik. A felső rétegben terjedő töltések által generált feszültségváltozást első közelítésben egy kétdimenziós Helmholtz-egyenlet írja le (elhanyagoljuk föld és a levegő felé eső parazita kapacitásokat, valamint az alsó rétegben terjedő töltéshordozók hatását):

$$(\Delta - a^2)U(r, \phi) = -JR_s\Theta(r_L - r),$$

ahol J a bemenő fényáramsűrűség, Θ a Heaviside-függvény, és

$$a = \sqrt{\frac{R_s}{R_d} + i2\pi f R_s C_d}$$

a jel karakterisztikus hullámhossza. A jelet kapacitív módon tudjuk detektálni, amit két különböző geometriájú kapacitív szenzorral valósítunk meg. Az egyik szenzor egy transzparens körlap alakú elektróda, amelynek átmérője megegyezik a fényfolt átmérőjével, míg a másik szenzor a fényfolttal koncentrikus körgyűrű, r_1 és r_2 sugarakkal. Tegyük fel, hogy a mérőelektródák infinitezimálisan közel vannak a mintához, és a mérőfej okozta bármiféle parazita kapacitás elhanyagolható! A továbbiakban feltesszük, hogy a minta szélén a töltések nem tudnak elfolyni a felső rétegből, azaz a szelet középpontú rendszerben a jel sugárirányú gradiense zérus a szelet szélén.

a) Ábrázoljuk az $R_{\mathrm{eff}} = \frac{|U|}{Jr_L 2\pi}$ effektív ellenállás frekvenciafüggését az átlátszó és a körgyűrű elektróda esetén $f = 500000/2^n$ Hz-es frekvenciákon, ahol $n = 0, 1, \ldots, 15$, ha a gerjesztés a minta középpontjában történik!

b) A minta térképezése során a mérőfej elmozdul, azaz a gerjesztés helye, illetve az elektródák elmozdulnak. Legyen r_0 a fényfolt középpontjának távolsága a szelet középpontjától! Határozzuk meg a felső rétegben terjedő jel alakját az r_0 középpontú koordinátarendszerben, és ábrázoljuk az egyes elektródák esetén az effektív ellenállást az egyik sugár mentén r_0 függvényében a $0 < r_0 < R - r_L$ tartományban $f = 7800$ Hz esetén!

A paraméterek tipikus értékei: $R_s = 500\,\Omega$, $C_d = 5\,nF/\mathrm{cm}^2$, $R_d = 300\,k\Omega\,\mathrm{cm}^2$, $R = 150$ mm, $r_L = 1$ mm, $r_1 = 2{,}5$ mm, $r_2 = 5$ mm. Ügyeljünk arra, hogy a gerjesztő fény foltja és a mérőelektródák véges kiterjedésűek!

(Kis-Szabó Krisztián)

25. Vizsgáljuk meg egy részecske mozgását egy lencse alakú biliárdban! (A biliárd belsejében szabadon, súrlódásmentesen mozog a részecske, a falakon pedig tökéletesen rugalmasan pattan vissza.) A lencse alakú biliárdot két egyforma körív határolja, melyek csúcsban találkoznak. Engedjük meg azt is, hogy a körívek félkörnél hosszabbak legyenek! A csúcsokat összekötő egyenesre merőleges szimmetriatengely mentén periodikus pálya alakul ki.
a) Vizsgáljuk meg a pálya stabilitását!
b) Milyen alakzatot formálnak a fázistér egy metszetében a fenti periodikus pálya közelében mozgó pályák, ha a periodikus pálya stabil?
c) Határozzuk meg közelítő eljárással a b)-beli pályákra koncentrálódó kvantumállapotoknak megfelelő energia-sajátértékeket!

(Kaufmann Zoltán)

26. Keressünk olyan egydimenziós klasszikus mechanikai rendszert, amelyben az időeltolás az $x \to K(t) \cdot x$ skálatranszformációt eredményezi. Először a $K(t)$ függvényt határozzuk meg annak felhasználásával, hogy az időeltolások csoportot alkotnak, majd írjuk fel a keresett dinamikát előállító $H(x, p)$ Hamilton-függvényt.

Ezután kvantáljuk meg a rendszert (ügyeljünk a Hamilton-operátor hermitikusságára), és határozzuk meg a $\psi(x)$ energia-sajátfüggvényeket! Hogyan hat ezeken az előbbieknek megfelelő $\psi(x) \to \psi(\frac{x}{K(t)})$ skálatranszformáció?

Végül tekintsük az $\frac{1}{n}$-es átskálázásokat, és írjuk elő a $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(nx) = 0$ kvantálási feltételt! Mik lesznek az energia-sajátértékek? És mit szól mindehhez Riemann, Hilbert, illetve Pólya György?

(Kónya Gábor)

27. Határozzuk meg egy dobozba zárt elektron energiaszintjeit, ha a doboz vízszintes oldalainak hossza a és b, a függőleges magassága h, és az elektronra függőlegesen lefelé mutató homogén gravitációs erő hat! A doboz falát tekintsük végtelen magas potenciálfalnak! Vizsgáljuk a nagyenergiás (szemiklasszikus) határesetet!

(Cserti József)

28. Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{H}$, ahol $\mathbb{H}$ a kvaterniókat jelöli. Tekintsük a $\mathbb{K}$ test feletti 2×2-es hermitikus mátrixokat:

$$A = \begin{pmatrix} t + x & y \\ y^* & t - x \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} -t + x & y \\ y^* & -t - x \end{pmatrix},$$

ahol $x, t \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{K}$. Mutassuk meg, hogy az ilyen típusú mátrixok tere természetes módon azonosítható a 3+1 ill. 5+1 dimenziós Minkowski-térrel! Milyen kifejezés adja meg a $g(A, B)$ Lorentz-metrikát?

Definiáljunk spinorokat a következő módon: Legyen $\phi, \psi \in \mathbb{K}^2$, majd egy adott A hermitikus mátrixhoz rendeljük hozzá azt a $\gamma(A)$ mátrixot, amely a $(\phi, \psi) \in \mathbb{K}^4$ páron a következőképp hat:

$$\gamma(A)(\phi, \psi) = (A\psi, \bar{A}\phi).$$

Mutassuk meg, hogy az így definiált γ mátrixok pontosan a Dirac-mátrixok azonosságának tesznek eleget, azaz

$$\{\gamma(A), \gamma(B)\} = 2g(A, B) \cdot \mathbf{1}!$$

Hogyan lehet ábrázolni a Lorentz-transzformációkat a spinorok terén? Hogyan lehet két spinorból skalárt illetve vektort gyártani a Dirac-elméletből ismert $\bar{\Psi}\Psi$ és $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ kifejezések mintájára? Mutassuk meg, hogy az így nyert leképezések kovariánsak!

Végül pedig: mi a helyzet az októniókkal?

(Pozsgay Balázs)

29. Háromdimenziós harmonikus oszcillátor potenciálba zárt nemkölcsönható bozonok Bose-Einstein kondenzációt mutatnak egy kritikus T_c hőmérséklet alatt.
a) Mutassuk meg, hogy a kritikus hőmérséklet vezető rendben ($T_c \approx T_0$) a $k_\mathrm{B}T_0 = KN^{1/3}$ módon függ az N részecskeszámtól! Számítsuk ki a K arányossági tényezőt!
b) Pontosabb számítások szerint T_c végesméret-korrekciókat is kap. Adjunk becslést (számolást) a $(T_c - T_0)/T_0$ értékére! Hogy függ ez N-től?

(Csordás András)

30. Egy kétdimenziós A felületű mintában az elektron dinamikáját a

$$\hat{H} = \frac{A}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbf{k}\in\Omega} \mathrm{d}^2k \Big[\epsilon(\mathbf{k})\, |\mathbf{k}\uparrow\rangle \otimes \langle\mathbf{k}\downarrow| + \epsilon(\mathbf{k})^*\, |\mathbf{k}\downarrow\rangle \otimes \langle\mathbf{k}\uparrow|\Big]$$

Hamilton-operátor írja le. X^* az X komplex konjugáltját, $|\mathbf{k}\uparrow\rangle$ ($|\mathbf{k}\downarrow\rangle$) a $\hbar\mathbf{k}$ impulzusú, $\uparrow$ ($\downarrow$) spinű állapotot jelöli, valamint

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_0 \left[1 + 2\cos(k_x a) \exp\left(i\sqrt{3}k_y a\right)\right],$$

ahol ϵ_0 energia dimenziójú, a pedig hosszúság dimenziójú konstansok ($a \ll \sqrt{A}$). Az elektron lehetséges $\mathbf{k}$ hullámszámvektorai egy szabályos hatszög peremű tartományt (Ω) alkotnak, melynek csúcsai a $\mathbf{K}_n = \frac{2\pi}{3a}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)$ koordinátákkal adottak ($n = 0, 1, \ldots, 5$).
a) Határozzuk meg az elektron $\mathbf{v}_g(\mathbf{k})$ csoportsebességét!
b) A mintában preparálunk egy koordinátában és impulzusban egyaránt szűk

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Delta r} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha(\mathbf{k}_0)} \\ e^{i\alpha(\mathbf{k}_0)} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2}{4\Delta r^2}}, \qquad \alpha(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon(\mathbf{k})}{|\epsilon(\mathbf{k})|}}$$

hullámcsomagot. Elemezzük a hullámcsomag szétfolyását az idő függvényében! Milyen $\mathbf{k}_0$ paraméterű hullámcsomag folyik szét legkevésbé?

(Rakyta Péter és Oroszlány László)

31. A messewani egyetem fizika kara néhány éve új épületbe költözött. Mynden Lee ben Canal, a meta-parafizika professzora az épület északra néző oldalán, az első emeleten kapott panorámaablakos szobát. Azóta is büszkén mutogatta minden látogatójának télen-nyáron napfényben fürdő szobáját, ahol „egyszerűen öröm dolgozni, és ahol a meta-parafizika bonyolult formulái a vidáman ragyogó napfényben szinte maguktól ugrálnak a fejemből a papírra”. Érthető, hogy a professzor öröme hirtelen bánattá változott, amikor ablakával szemben, az épülettől alig ötven méterre emelkedni kezdett a konkurens Ortofizikai Egyetem impozáns, kilencemeletesre tervezett tömbje. Lee ben Canal professzor már előre látta azt a szomorú percet, amikor a szürke betonfalak mindörökre eltakarják előle a Napot. Ezt nem hagyhatom! – döntötte el, és munkához is látott. A két épület közti térséget hamarosan bonyolult mechanikai, termikus és optikai berendezések lepték el, melyek egyetlen célja a levegő törésmutatójának manipulálása volt. „Ha megfelelően választjuk meg a törésmutatót és annak helyfüggését, a szomszéd épület felett elhaladó fénysugarak lefelé kanyarodnak, és ismét egész évben bevilágítanak a szobámba. Ha ügyesek leszünk, még a hátsó falat is elérik. Persze még adódhatnak technikai nehézségek.” – magyarázta a professzor a paraoptikai tanszék érdeklődő hallgatóinak, akik persze azonnal felajánlották neki segítségüket.

Segítsünk mi is a professzornak! Számítsuk ki, hogy kell megváltoztatni a levegő törésmutatóját a két épület között! Milyen technikai manipulációkkal, milyen eszközökkel lehet ezt elérni? Végezzünk numerikus becsléseket is! Milyen kockázatokkal és mellékhatásokkal járhatnak ezek a manipulációk?

Tájékoztatásul: A messewani egyetem a déli szélesség 49-ik fokán fekszik. A környéken a legmelegebb nyári napon 42°C-ot, a leghidegebb téli napon pedig −25°C-ot mértek. A messewani szabványok szerint egy emelet magassága 4,2 m, az egyetemi dolgozószobák mérete 5 × 5 m.

(Dávid Gyula)

\end{document}